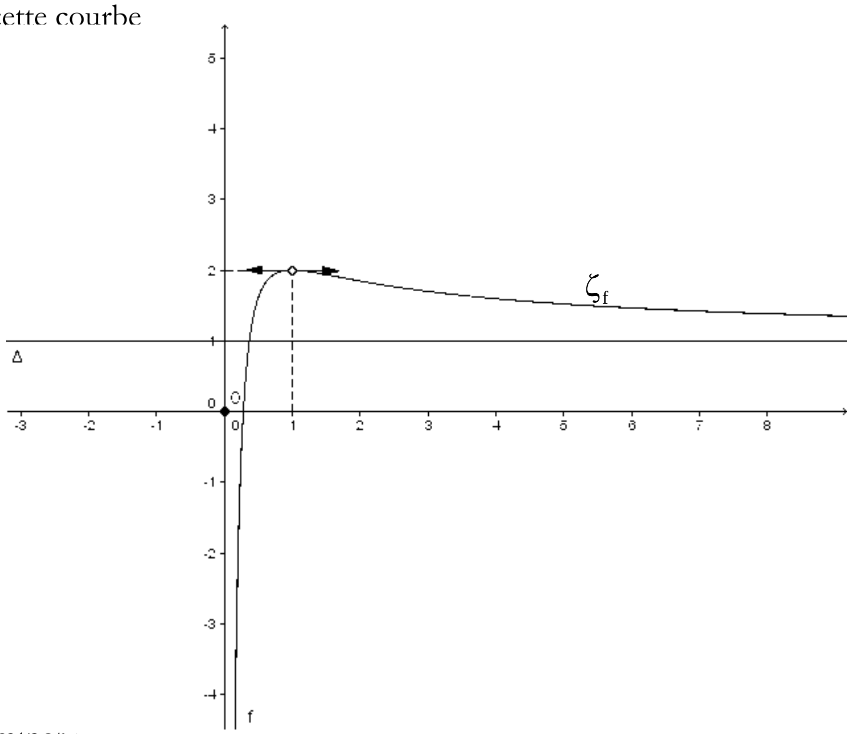
L.7.11 Sahline — A.S :2008/2009

Devoir de synthèse N°2

Durée : 3.h

Exercice N°1(6pts)

I/ La courbe ζ_f ci-dessous représente une fonction f définie sur $]0,+\infty[$; les droite d'équation x = 0 et y =1 étant des asymptotes à cette courbe



1/ En utilisant le graphique, déterminer :

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

b) Le tableau de variation de f

2/ on suppose que l'expression de f(x) est de la forme $f(x) = a + \dfrac{b}{x} + c\dfrac{\ln x}{x}$ où a,b et c sont trois nombres réels .

a) Montrer que, pour tout x appartenant à $]0,+\infty[$, $f'(x) = -\dfrac{b}{x^2} + c(\dfrac{1-\ln(x)}{x^2})$

b) Montrer, en se référant au graphique, que les réels a,b et c vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 2 \\ c - b = 0 \end{cases}$$

c) Déduire alors l'expression de f(x)

II/ Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(e^{-x})$

1/ Montrer que pour tout réel x, on a $g(x) = (1-x)e^x + 1$

2/a) Montrer que $g'(x) = -xe^x$ puis dresser le tableau de variation de g

b) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{g(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.

3)a) Montrer que l'équation g(x)=0 admet dans $]0,+\infty[$ une solution unique α et que $1 < \alpha < 1.5$

b) Tracer ζ_g la courbe représentative de g dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

Exercice N°2(3pts)

Chaque question ci-dessous comporte trois réponses possibles. Pour chacune de ces questions, une seule des réponses proposées est exacte. On demande de choisir cette réponse

1/ Soit D une droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 2\alpha + 1 \\ y = -\alpha + 3 \\ z = \alpha - 2 \end{cases}$; $\alpha \in \mathbb{R}$

Un vecteur directeur de D est

a) $\vec{U}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ b) $\vec{V}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ c) $\vec{w}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

2/ Soit S une sphère d'équation cartésienne est : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et P le plan d'équation : $x + y + z + 1 = 0$

a) $S \cap P = \varnothing$ b) $S \cap P$ est un point c) $S \cap P$ est un cercle

3/ Pour $x < 0$ on donne la fonction : $f(x) = \ln(-x)$. La fonction dérivé de f est la fonction $f'(x) =$

a) $\frac{-1}{x}$ b) $\frac{1}{x}$ c) $\frac{2}{x}$

4/ une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$ sur $]1, +\infty[$ est

a) $x \mapsto \ln(\ln x)$ b) $x \mapsto \frac{1}{2}(\ln x)^2$ c) $x \mapsto 2\ln(2x)$

Exercice N°4(6pts)

L'espace ξ étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points

$A(-1, -1, 1)$, $B(3, 2, -1)$ et $C(1, \frac{1}{2}, 1)$

1 /a) Donner les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

b) Vérifier qu'une équation cartésienne du plan P défini par les points A, B et C est : $3x - 4y - 1 = 0$

2/ Soit m un réel. On considère l'ensemble S_m des points M(x,y,z) de ξ tels que :

$x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2(m+1)y + m^2 + 2m = 0$

Montrer que S_m est une sphère dont on précisera, en fonction de m, le rayon R_m et les coordonné du centre I_m

3/a) Vérifier que $d(I_m, P) = \frac{|m+5|}{5}$

b) Etudier, suivant les valeurs de m, la position relative de S_m et P

c) Montrer que l'intersection de S_5 et P est un cercle dont on précisera le centre et le rayon

4/ Déterminer m pour que S_m passe par O

Exercice N°3(5pts)

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variation est le suivant

On donne : $f(1)=\dfrac{2e}{e+1}$

$f(2)=\dfrac{2e^2}{e^2+1}$

x	$-\infty$		$+\infty$
f(x)	0	$\nearrow$	2

On donne la fonction h(x) = f(x) – x
dont le tableau de variation est le suivant

x	$-\infty$		$+\infty$
h(x)	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

1/ Montrer que l'équation $h(x)=0$ admet une solution unique $\alpha\in\mathbb{R}$ et que $\alpha\in\left]1,2\right[$

2/ Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases}U_0=0\\ U_{n+1}=f(U_n)\end{cases}$

a) Montrer que pour $n\in\mathbb{N}$ on a $0\le U_n<2$

b) Montrer par récurrence que U est croissante

c) En déduire que la suite U est convergente et préciser $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

3/ On admet que pour tout x de $\mathbb{R}$ on a $|f'(x)|\le\dfrac{1}{2}$

a) Montrer que $|U_{n+1}-\alpha|\le\dfrac{1}{2}|U_n-\alpha|$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

b) En déduire que $|U_n-\alpha|\le(\dfrac{1}{2})^n|\alpha|$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

c) Retrouver alors $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$